1 Mathematische Grundlagen

1.1 Die vier Grundrechenarten

1.1.1 Addition

Die Addition ist die erste Grundrechenart (lat. addere = hinzufügen). Hierbei geht es um das Zusammenzählen von zwei oder mehr Zahlen.

Beispiele:

$2 + 4 = 6.$
$7 + 5 + 8 = 20.$
$9 + 2 + 1 + 3 = 15.$

Der Operator für die Addition ist das Pluszeichen ($+$). Ein Operator (lat. operator = Arbeiter, Verrichter) ist eine mathematische Vorschrift, die festlegt, wie aus mathematischen Objekten (z. B. Zahlen, geometrische Körper) neue mathematische Objekte gebildet werden. Die zu addierenden Zahlen werden Summanden genannt, das Ergebnis der Addition ist die Summe (lat. summare = existieren, sich befinden).
Es gilt:

412	$+$	367	$=$	779.
Summand	Operator	Summand	$=$	Summe

1.1.2 Subtraktion

Bei der zweiten Grundrechenart, der Subtraktion (lat. substrahere = wegziehen), wird eine Zahl von einer anderen Zahl abgezogen. Der Operator für die Subtraktion ist das Minuszeichen ($-$). Die zu verringernde Zahl heißt Minuend (lat. minuere = verringern). Die Zahl, die vom Minuend abgezogen wird, ist der sogenannte Subtrahend. Das Ergebnis einer Subtraktion ist die Differenz (lat. differentia = Unterschied).
Es gilt:

37	$-$	21	$=$	16.
Minuend	Operator	Subtrahend	$=$	Differenz.

Sind die beiden Zahlen gleich groß, ist das Ergebnis 0. Ist die zweite Zahl größer als die erste Zahl, so ist das Ergebnis eine negative Zahl. Das bedeutet, dass man auf dem

Zahlenstrahl den Punkt 0 überschritten hat und die Zahlenwerte kleiner als 0 sind. Sie werden mit einem Minuszeichen versehen.

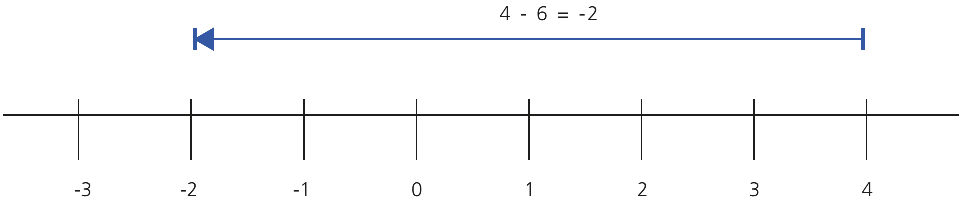

Bild 1: ***Negative Zahlen (vgl. Rudolph, 2022[1])***

In diesem Fall ist der Rechenvorgang umzudrehen. Es wird der kleinere Zahlenwert vom größeren abgezogen und das Ergebnis mit einem Minuszeichen versehen. Gerade auch bei physikalischen/technischen Größen kommen negative Zahlenwerte vor. So gibt es in der Celsius-Skala negative Temperaturwerte (▶ Kapitel 2.4.1) und Verzögerungen (Bremsvorgänge) sind negative Beschleunigungen (▶ Kapitel 2.1.2.4).

Beispiele:

$13 - 2 = 11.$

$234 - 237 = -(237 - 234) = -3.$

1.1.3 Multiplikation

Eine weitere Grundrechenart ist die Multiplikation (lat. multiplicare = vervielfältigen). Dabei werden 2 oder mehrere Zahlen miteinander multipliziert. Die Multiplikation ist genau betrachtet eine Abkürzung für eine mehrfach durchgeführte Addition. Es wird nämlich die gleiche Zahl mehrmals addiert.

Beispiele:

$2 \cdot 8 \cdot 3 = (8 + 8) + (8 + 8) + (8 + 8) = 16 + 16 + 16 = 48.$

$8 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 32.$

Der Operator der Multiplikation ist das Malzeichen (·). Oftmals wird hierfür auch ein (x) oder ein (*) verwendet. Die Zahlen, die man miteinander multipliziert, nennt man Faktoren (lat. factor = Macher). Das Ergebnis einer Multiplikation heißt Produkt (lat. productum = das Hervorgebrachte).

Es gilt:

8	$\cdot$	3	$\cdot$	3	=	72.
Faktor	Operator	Faktor	Operator	Faktor	=	Produkt.

Folgende Rechenregeln gelten für die Multiplikation:

- Sind beide Faktoren positiv, so ist das Ergebnis wieder eine positive Zahl. Bsp.: $8 \cdot 2 = 16$. Kurzschreibweise: $+ \cdot + = +$.
- Ist einer der beiden Faktoren negativ, so ist das Ergebnis eine negative Zahl.
  Bsp.: $6 \cdot (-3) = -18$. Kurzschreibweise: $+ \cdot - = -$ bzw. $- \cdot + = -$.
- Sind beide Faktoren negativ, so ist das Ergebnis eine positive Zahl. Bsp.: $-9 \cdot (-3) = 27$. Kurzschreibweise $- \cdot - = +$.

1.1.4 Division

Die vierte und letzte Grundrechenart ist die Division (lat.: divisio = Teilung). Hierbei handelt es sich um die Umkehrung der Multiplikation.

Beispiele:

$9 : 3 = 3.$
$32 : 8 = 4.$

Der Operator für die Division ist das Geteiltzeichen (:) oder auch (/). Der Bruchstrich bei einem Bruch ist ebenfalls ein Kurzzeichen für eine Division (▶ Kapitel 1.2). Die zu dividierende Zahl heißt Divident (lat. dividendus = zu teilender Wert). Die Zahl, durch die geteilt wird, ist der Divisor (lat. divisor = (Ab)teiler). Das Ergebnis der Division ist wiederum der Quotient (lat. quotiens = wie oft, wievielmal).
Es gilt:

18	:	3	=	6.
Divident	Operator	Divisor	=	Quotient

Die zur Multiplikation genannten Vorzeichenregeln gelten auch bei der Division. Kurzschreibweise:

- $+ : + = +$.
- $+ : - = -$.
- $- : + = -$.
- $- : - = +$.

1.1.5 Gemischte Rechnungen

Werden in einer Rechnung Grundrechenarten gemischt, so gilt die Regel: Punkt geht vor Strich.

Beispiel:

$3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 50$.

Es werden zuerst die Produkte $3 \cdot 6 = 18$ und $4 \cdot 8 = 32$ gebildet, da ihre Faktoren durch Punkte verbunden sind. Dann werden die beiden Produkte addiert.

Anders ist zu verfahren, wenn Klammern gesetzt sind, die zuerst ausgerechnet werden müssen.

Beispiel:

$3 \cdot (6 + 4) \cdot 8 = 3 \cdot 10 \cdot 8 = 240$.

Hierbei handelt es sich um ein Produkt aus 3 Faktoren. Einer davon ist die Klammer, deren Wert, also $(6 + 4) = 10$, zuerst ausgerechnet werden muss. Anschließend wird diese Summe mit den anderen Faktoren multipliziert.

1.2 Bruchrechnung

Im Alltag hat man es nicht immer mit ganzen Zahlen zu tun. So sind ganze Zahlen ohne Nachkommastellen als Ergebnis einer Division oder anderer technischer Rechnungen eher die Ausnahme. Auch in der Umgangssprache werden oftmals Bruchteile oder Brüche benutzt. Beispielsweise, wenn die Rückmeldung kommt, dass ein Faltbehälter zu einem Drittel gefüllt oder der Fahrzeugtank noch halb voll ist. Einfache oder auch gemeine Brüche geben Anteile oder Verhältnisse an. In der Mathematik werden Brüche mit Hilfe eines Bruchstrichs ausgedrückt:

- ein Halb: $\frac{1}{2}$.
- ein Achtel: $\frac{1}{8}$.

Die Zahl oberhalb des Bruchstrichs nennt man den Zähler, die Zahl unterhalb des Bruchstrichs den Nenner. Zähler und Nenner können dabei unterschiedliche ganze Zahlen annehmen. Da der Bruchstrich zwischen Zähler und Nenner letztendlich dieselbe Bedeutung wie eine Division hat, kann man einen Bruch auch als Quotient bezeichnen und in eine Dezimalzahl umrechnen (▶ Kapitel 1.2.2).

Beispiele:

$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5.$

$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375.$

Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich sind (z. B. $\frac{4}{4}, \frac{17}{17}, \frac{234}{234}$ usw.), hat immer den Wert 1. Bei Brüchen wird zwischen echten und unechten Brüchen unterschieden. Bei einem echten Bruch ist der Zähler kleiner als der Nenner (z. B. $\frac{23}{70}, \frac{4}{9}$ usw.), d. h. der Wert des Bruches ist kleiner 1.

Bei einem unechten Bruch ist dies umgekehrt, d. h. der Zähler ist größer als der Nenner (z. B. $\frac{456}{334}, \frac{34}{20}$ usw.), daraus folgt, dass der Wert des Quotienten größer 1 ist.

1.2.1 Rechenregeln für das Bruchrechnen

Brüche können gekürzt oder erweitert werden, ohne dass sich ihr Wert ändert. In den folgenden Kapiteln werden diese beiden mathematischen Operationen erläutert.

1.2.1.1 Kürzen von Brüchen

Kürzen bedeutet, dass man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilt. Wenn man den Zähler durch die Zahl teilt, wird dieser kleiner. Da aber auch der Nenner um den gleichen Faktor verkleinert wird, ändert der Bruch wiederum seinen Wert nicht.

Beispiele

$\frac{6}{24} = \frac{6:3}{24:3} = \frac{2}{8} = \frac{2:2}{8:2} = \frac{1}{4}.$

$\frac{234}{39} = \frac{234:13}{39:13} = \frac{18}{3} = \frac{18:3}{3:3} = 6.$

1.2.1.2 Erweitern von Brüchen

Erweitern bedeutet Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl zu multiplizieren. Man spricht auch davon, den gleichen Faktor hinzuzufügen. Wie schon beim Kürzen ändert sich der Wert des Bruches nicht.

Beispiele:

$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8}{24}$.

Wenn man dieses Beispiel wieder mit 8 kürzen würde, kommt man wieder zum ursprünglichen Bruch.

$\frac{8}{24} = \frac{8:8}{24:8} = \frac{1}{3}$.

Beide Vorgänge sind für technische Rechnungen wichtig, insbesondere für die Umwandlung von Maßeinheiten und das Umstellen von Formeln (▶ Kapitel 1.3.4 und 1.4). Um zu erkennen, welche Faktoren im Zähler und Nenner gleich sind und ggf. gekürzt werden können, ist es notwendig, Zähler und Nenner in Primfaktoren zu zerlegen. Dabei gilt, dass jede natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegt werden kann. Die natürlichen Zahlen definieren sich darüber, dass mit ihnen jede Art von Objekten gezählt werden kann. Oftmals wird auch die 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt (Duden, 2021[1]). Bei Primzahlen handelt es sich um natürliche Zahlen, die nur durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar sind. Da man die 1 bei den Primzahlen ausgenommen hat, lauten die ersten Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59 usw. Bei der Primfaktorzerlegung geht es darum, eine Zahl in möglichst kleine Primzahlen zu zerlegen und diese miteinander zu multiplizieren. Diese nennt man dann Primfaktoren.

Beispiele:

$33 = 3 \cdot 11$.

$413 = 7 \cdot 59$.

$6\,292 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 = 2^2 \cdot 11^2 \cdot 13$.

$53 = 53$ nicht weiter zerlegbar, da eine Primzahl.

Wenn ein Primfaktor mehrfach vorkommt, kann die Potenzschreibweise verwendet werden. Hierbei wird die Zahl nur einmal geschrieben und mit einer höhergestellten Zahl (Hochzahl) versehen. Diese wird auch Exponent (lat. exponere = herausstellen) genannt und sagt aus, wie oft die Zahl mit sich selbst multipliziert wird.

Für die Faktorzerlegung gelten folgende Gesetzmäßigkeiten, die sogenannten Teilbarkeitsregeln (mathe-lexikon.at, 2022). Man kann einer Zahl ansehen,

- ob sie durch 2 teilbar ist: letzte Ziffer gerade.
- ob sie durch 3 teilbar ist: Quersumme teilbar durch 3 ohne Rest. Die Quersumme ist die Summe der einzelnen Ziffern einer Zahl.

- ob sie durch 4 teilbar ist: aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 ohne Rest teilbar.
- ob sie durch 5 teilbar ist: letzte Ziffer 0 oder 5.
- ob sie durch 8 teilbar ist: aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 ohne Rest teilbar.
- ob sie durch 10 teilbar ist: letzte Ziffer 0.

Beispiel:
Quersumme von 18 ist $8 + 1 = 9$. Da 9 durch 3 ohne Rest geteilt werden kann, ist auch 18 durch 3 ohne Rest teilbar.

1.2.1.3 Addition von Brüchen

Beispiel:
Wenn man jeweils 2 noch zu $\frac{1}{4}$ gefüllte Schaummittelkanister in einen zu $\frac{1}{2}$ gefüllten Kanister umfüllt, dann erhält man insgesamt 1 vollen Schaummittelkanister.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{1} = 1.$$

Um dies rechnerisch nachvollziehen zu können, muss man Brüche addieren. Die Vorgehensweise bei der Addition erfolgt in drei Schritten:

1. Brüche auf den gleichen Nenner bringen,
2. Brüche addieren,
3. Ergebnisbruch kürzen.

Schritt 1: Brüche auf den gleichen Nenner bringen
Um Brüche addieren zu können, müssen sie denselben Nenner haben. Dies geschieht durch Kürzen oder Erweitern.

Beispiel:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Schritt 2: Brüche addieren
Hierzu werden die beiden Zähler auf einen Bruchstrich geschrieben und addiert. Der Nenner bleibt erhalten.

Beispiel:

$\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$.

Schritt 3: Ergebnisbruch kürzen

Wenn die Brüche addiert wurden, kann oftmals das Ergebnis noch vereinfacht werden, z. B. indem man Zähler und Nenner durch die gleiche ganze Zahl teilt.

Beispiel:

$\frac{4}{4} = \frac{4:4}{4:4} = 1$.

Bei sehr großen Zahlen ist es oft besser, mehrfach zu kürzen, d. h. den Zähler und Nenner z. B. erst mit 2 oder 3 zu kürzen. Meist lassen sich dann weitere gemeinsame Faktoren von Zähler und Nenner erkennen. Wenn der neue Bruch dann auch wieder gemeinsame Faktoren besitzt, wird erneut gekürzt.

1.2.1.4 Subtraktion von Brüchen

Wie beim Addieren von Brüchen wird in drei Schritten vorgegangen:

1. Brüche auf den gleichen Nenner bringen,
2. Zähler subtrahieren,
3. Ergebnisbruch kürzen.

Schritt 1: Brüche auf den gleichen Nenner bringen

Um Brüche subtrahieren zu können, müssen – wie bei der Addition bereits festgestellt – beide auf den gleichen Nenner gebracht worden sein.

Beispiel:

$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6} - \frac{3}{6}$.

Schritt 2: Brüche subtrahieren

Hierzu werden die beiden Zähler auf einen Bruchstrich geschrieben und subtrahiert. Der Nenner bleibt gleich.

Beispiel:
$\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6}$.

Schritt 3: Ergebnisbruch kürzen
Anschließend kann das Ergebnis oftmals noch vereinfacht werden. So kann man z. B. Zähler und Nenner durch die gleiche ganze Zahl teilen.

Beispiel:
$\frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}$.

1.2.1.5 Multiplikation von Brüchen

Die Multiplikation von Brüchen ist ganz einfach. Hierzu werden lediglich die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert.

Beispiele:
$\frac{12}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{36}{35}$.
$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{6}{42} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

Im zweiten Beispiel konnte der Bruch noch einmal mit 2 und dann mit 3 gekürzt werden.

1.2.1.6 Division von Brüchen

Als letzte Operation wird nun noch das Dividieren mit Brüchen behandelt. Dazu wird der erste Bruch mit dem Kehrwert des Bruches, durch den dividiert werden soll, multipliziert. Kehrwert bedeutet, dass Zähler und Nenner vertauscht werden.

Beispiele:

$$\frac{3}{5} : \frac{6}{13} = \frac{3}{5} \cdot \frac{13}{6} = \frac{3 \cdot 13}{5 \cdot 6} = \frac{39}{30} = \frac{13}{10} = \frac{10+3}{10} = 1\,\frac{3}{10}.$$

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 2} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}.$$

$$\frac{5}{16} : \frac{15}{24} = \frac{5}{16} \cdot \frac{24}{15} = \frac{5 \cdot 24}{16 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 8}{2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{2}.$$

1.2.2 Dezimalzahlen

Eine andere Möglichkeit, Teile einer Gesamtheit darzustellen, sind die sogenannten Dezimalzahlen. Im Alltag begegnet uns fast ausschließlich diese Zahlenangabe, insbesondere bei technischen Rechnungen. Sie sollen deshalb hier genauer betrachtet werden. Der sichere Umgang mit ihnen ist eine der wichtigsten Voraussetzungen für die Lösung technischer Rechenaufgaben. Dabei ist insbesondere auf die Stelle des Kommas in der Dezimalzahl zu achten. Wird ein Komma nur um eine Ziffer verschoben – an der falschen Stelle – gesetzt, so verfälscht sich das Ergebnis um das Zehnfache.

Ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz von 10 ist, wird Dezimalbruch genannt. Er kann als Dezimalzahl geschrieben werden. Es gilt dabei:

$10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$; $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ usw.

Beispiele:

$$\frac{1}{10} = 1 : 10 = 0{,}10.$$

$$\frac{3}{100} = 3 : 100 = 0{,}03.$$

$$\frac{8}{1\,000} = 8 : 1\,000 = 0{,}008.$$

Dabei gibt die erste Stelle hinter dem Komma die Zehntel, die zweite Stelle hinter dem Komma die Hundertstel und die dritte Stelle hinter dem Komma die Tausendstel usw. an. Alle bislang betrachteten Brüche können in Dezimalzahlen umgewandelt werden, indem man Zähler durch Nenner teilt. Eine Dezimalzahl wird in einen Bruch umgewandelt, indem man das Komma weglässt, den Zahlenwert als Zähler einsetzt und den Nenner folgendermaßen bildet: Setzen einer Potenz von 10, die so viele Nullen besitzt wie die Dezimalzahl Stellen hinter dem Komma hat.